

Licence mention Mathématiques - Semestre 4

Probabilités 1

Corrigé du devoir 2

Exercice 1.

Un sac S contient cinq jetons : deux sont numérotés 1 et les trois autres sont numérotés 2.

Partie A

1) On extrait deux jetons simultanément de S . On peut donc considérer l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant :

- $\Omega = \{\text{combinaisons d'ordre 2 de } \{1_a, 1_b, 2_a, 2_b, 2_c\}\}$; $\text{card}\Omega = C_5^2 = \binom{5}{2} = 10$;

- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ car Ω est fini ;

- P : équiprobabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$: pour tout $A \in \mathcal{A}$, $P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$.

Soit A l'événement "obtenir deux jetons portant le numéro 2". On a alors $P(A) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$.

2) a) On effectue 2100 tirages simultanés de deux jetons avec remise (les deux jetons obtenus à chaque tirage sont remis dans le sac S avant le tirage des deux jetons suivants). On peut donc considérer que l'on répète dans les mêmes conditions $n = 2100$ fois l'expérience aléatoire "tirer deux jetons" au cours de laquelle l'événement A a la probabilité $p = \frac{3}{10}$ de se réaliser. La variable aléatoire X égale au nombre de tirages où les deux jetons tirés portent le numéro 2, c'est-à-dire au nombre de réalisation de A , suit donc la loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p) = \mathcal{B}\left(2100, \frac{3}{10}\right)$.

b) On a donc $E(X) = np = 2100 \times \frac{3}{10} = 630$

et $\text{Var}(X) = np(1-p) = 2100 \times \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} = 21^2 = 441$.

Remarque : l'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = 21$.

Partie B

1) a) On effectue une série illimitée de tirages avec remise d'un jeton dans le sac S . On répète donc dans les mêmes conditions l'expérience aléatoire "tirer un jeton" au cours de laquelle un événement B "obtenir un jeton numéroté 1" a la probabilité $p = \frac{2}{5}$ d'être réalisé. Le nombre d'expériences (c'est-à-dire de tirages) nécessaires pour obtenir $r = 1$ réalisation de B est donc une variable aléatoire Z de la loi de Pascal $\mathcal{P}(r, p) = \mathcal{P}\left(1, \frac{2}{5}\right)$, c'est-à-dire Géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{2}{5}\right)$.

La variable aléatoire Y , égale au nombre de tirages effectués **avant** le tirage amenant un jeton numéroté 1 pour la première fois, vérifie $Z = Y + 1$. D'où le résultat demandé.

b) On a $\Omega_Z = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z = k) = \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}$. Comme $Y = Z - 1$, on en déduit que $\Omega_Y = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k) = P(Z - 1 = k) = P(Z = k + 1) = \frac{2}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^k$.

2) a) D'après 1)a), on a $E(Z) = \frac{r}{p} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}$ et $\text{Var}(Z) = \frac{r(1-p)}{p^2} = \frac{1(1-\frac{2}{5})}{(\frac{2}{5})^2} = \frac{15}{4}$.

b) On en déduit que $E(Y) = E(Z - 1) = E(Z) - 1 = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$
et $\text{Var}(Y) = \text{Var}(Z - 1) = \text{Var}(Z) = \frac{15}{4}$.

Partie C

1) et 2) On extrait successivement et avec remise deux jetons du sac S . On peut donc considérer l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant :

- $\Omega = \{\text{arrangements avec répétition d'ordre 2 de } \{1_a, 1_b, 1_c, 2_a, 2_b\}\}$; $\text{card}\Omega = 5^2 = 25$;

- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ car Ω est fini ;

- P : équiprobabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$: pour tout $A \in \mathcal{A}$, $P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$.

On désigne par X_1 la variable aléatoire égale à la somme des numéros des deux jetons tirés, et par X_2 la variable aléatoire égale au maximum des numéros des deux jetons tirés.

Loi de probabilité du couple (X_1, X_2) , la loi de probabilité de X_1 et loi de probabilité de X_2 :

$X_1 \setminus X_2$	1	2	loi de X_1
2	$\frac{4}{25}$	0	$\frac{4}{25}$
3	0	$\frac{12}{25}$	$\frac{12}{25}$
4	0	$\frac{9}{25}$	$\frac{9}{25}$
loi de X_2	$\frac{4}{25}$	$\frac{21}{25}$	1

Par exemple, $(X_1 = 2) \cap (X_2 = 2) = \emptyset$ car si le maximum des deux numéros est égale à 2, la somme des deux numéros est au moins égale à 3 donc ne peut être égale à 2. On a donc

$$P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2)) = P(\emptyset) = 0.$$

D'autre part, $(X_1 = 3) \cap (X_2 = 2)$ est réalisé si et seulement si on obtient un jeton 1 et un jeton 2, soit $C_2^1 \times C_2^1 \times C_3^1 = 12$ possibilités (C_2^1 possibilités de positionner le 1, C_2^1 possibilités de choisir le 1, C_3^1 possibilités de choisir le 2). On a donc $P((X_1 = 3) \cap (X_2 = 2)) = \frac{12}{25}$.

On complète ainsi le tableau de la loi conjointe de (X_1, X_2) . Les lois marginales de X_1 et de X_2 s'obtiennent en additionnant ligne par ligne et colonne par colonne.

3) $0 = P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2)) \neq P(X_1 = 2)P(X_2 = 2) = \frac{4}{25} \times \frac{21}{25}$ donc les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

$$\begin{aligned} \text{Autre méthode. } \text{Cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = \sum x_i y_j p_{ij} - (\sum x_i p_{i\bullet}) (\sum y_j p_{\bullet j}) \\ &= \frac{152}{25} - \frac{80}{25} \times \frac{46}{25} = \frac{24}{125} \neq 0 \text{ donc } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.} \end{aligned}$$

Exercice 2.

1) L'entier k étant tel que $1 \leq k \leq b + n$, on tire une à une, au hasard et sans remise, k boules de l'urne. On peut donc considérer l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant :

- $\Omega = \{\text{arrangements d'ordre } k \text{ de } \{b + n \text{ boules}\}\}$; $\text{card}\Omega = A_{b+n}^k$;
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ car Ω est fini ;
- P : équiprobabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Soit X la variable aléatoire prenant la valeur 1 si la dernière boule tirée est blanche, et la valeur 0 sinon. Il est clair que X est à valeurs dans $\Omega_X = \{0, 1\}$.

L'événement $(X = 1)$ est réalisé si on obtient une boule blanche au k -ème tirage, soit b possibilités, précédé d'un arrangement d'ordre $k - 1$ de $\{b + n - 1 \text{ boules restantes}\}$, soit A_{b+n-1}^{k-1} possibilités. On a donc

$$P(X = 1) = \frac{\text{card}(X = 1)}{\text{card}\Omega} = \frac{A_{b+n-1}^{k-1} \times b}{A_{b+n}^k} = \frac{b}{b + n}.$$

$$\text{Comme } P(X = 0) + P(X = 1) = 1, \text{ on a } P(X = 0) = 1 - P(X = 1) = 1 - \frac{b}{b + n} = \frac{n}{b + n}.$$

2) On tire maintenant les boules une à une, au hasard et avec remise. On effectue des tirages jusqu'à l'obtention d'une boule blanche. On suppose construit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ adapté.

Soit alors Y la variable aléatoire indiquant le nombre de boules tirées lorsqu'on obtient la première boule blanche, et prenant par convention la valeur 0 lorsqu'on ne tire aucune boule blanche.

Considérons les événements suivants : pour tous entiers naturels k et n non nuls, B_k : "la k -ème boule tirée est blanche" et A_n : "les n premiers tirages n'amènent aucune boule blanche".

a) L'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire Y est $\Omega_Y = \mathbb{N}$.

b) On a $P(Y = 1) = P(B_1) = \frac{b}{b + n} = 1 - p$, avec $p = \frac{n}{b + n}$. On a également

$P(Y = 2) = P(\overline{B_1} \cap B_2) = P(\overline{B_1})P(B_2/\overline{B_1}) = p(1 - p)$. Les tirages sont avec remise mais chaque tirage dépend des tirages précédents : un tirage n'a lieu que si les précédents n'ont pas donné de boule blanche. Les événements $\{B_k\}_{k \geq 1}$ ne sont donc pas indépendants. Ecrivant $(Y = k) = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k$, la formule des probabilités composées donne alors, pour tout entier $k \geq 3$:

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k) \\ &= P(\overline{B_1})P(\overline{B_2}/\overline{B_1}) \dots P(\overline{B_{k-1}}/\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_{k-2}})P(B_k/\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}}) \\ &= pp \dots p(1 - p) = p^{k-1}(1 - p). \end{aligned}$$

Cette dernière formule étant vraie pour $k = 1$ et $k = 2$; elle est donc valable pour tout entier $k \geq 1$.

c) Comme $|p| < 1$, on a alors $\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^{k-1}(1 - p) = (1 - p) \sum_{k=0}^{+\infty} p^k = (1 - p) \times \frac{1}{1 - p} = 1$.

d) Comme $\{(Y = k)\}_{k \geq 0}$ est un système complet d'événements, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k) = 1$, et donc $P(Y = 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = k) = 1$. Grâce au résultat du c), on obtient $P(Y = 0) = 0$. L'événement "ne tirer aucune blanche" est donc quasi-impossible.

e) Pour tout entier $n \geq 1$, l'inclusion $A_{n+1} \subset A_n$ résulte du fait que si les $n + 1$ premiers tirages n'amènent aucune boule blanche (A_{n+1} est réalisé), alors les n premiers tirages n'amènent aucune boule blanche (A_n est réalisé).

Par ailleurs, la formule des probabilités composées donne (comme au b)) :

$$\text{pour tout entier } n \geq 1, P(A_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{B_i}\right) = \prod_{i=1}^n P(\overline{B_i} / \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{B_{i-1}}) = \prod_{i=1}^n p = p^n.$$

f) Il est clair que $(Y = 0) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$. Comme $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout entier $n \geq 1$, la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est décroissante au sens de l'inclusion : on a donc $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$.

$$\text{On en déduit que } P(Y = 0) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p^n = 0 \text{ (puisque } |p| < 1).$$